МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧИЛИЩЕ (КОЛЛЕДЖ) ОЛИМПИЙСКОГО РЕЗЕРВА г. ИРКУТСКА»

ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ДИСЦИПЛИНА

БД.04 МАТЕМАТИКА

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
ПО МАТЕМАТИКЕ
«ЛОГАРИФМЫ»
для студентов I курса
по специальности: 49.02.01 Физическая культура

Разработчик: Елизарова С.Г. – преподаватель русского языка высшей категории ФГБУ ПОО «Государственное училище (колледж) олимпийского резерва г. Иркутска»

Иркутск 2025

Аннотация

Методическая разработка «Рабочая тетрадь «Логарифмы» соответствует большому разделу учебной дисциплине БД. 04 «Математика» для студентов 1 курса ГУОР г. Иркутска. Тетрадь содержит необходимый теоретический материал, рассмотрены образцы решения заданий и предложены задания для самостоятельной работы.

Пояснительная записка

Математика является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной со сложившимся устойчивым содержанием и общими требованиями к подготовке обучающихся и обеспечивает сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Раздел «Логарифмы» соответствует программе изучения учебной дисциплине БД. 04 «Математика» для студентов 1 курса ГУОР г. Иркутска. Он включает в себя свойства логарифмов, логарифмическую функцию, логарифмические уравнения и неравенства. Этот материал включен в экзамен по математике за 1 курс. Изучение этой темы вызывает трудности у обучающихся и рабочая тетрадь помогает в усвоении материала.

Создание рабочей тетради вызвано необходимостью освоения программы по математике обучающимися отделения «Спортивная подготовка», которые не имеют возможность посещать занятия, находясь на сборах или соревнованиях. Тетрадь содержит необходимый теоретический материал, что исключает необходимость иметь под рукой учебник. Тетрадь можно использовать в электронном виде или распечатать и выполнять задания в ней. Для освоения материала используются образцы решения заданий и алгоритмы. Такой формат дает возможность организовать обратную связь с обучающимися.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ПО МАТЕМАТИКЕ

«ЛОГАРИФМЫ»

Содержание:

1. Логарифмы и их свойства 5
2. Логарифмическая функция 9
3. Логарифмические уравнения 11
4. Логарифмические неравенства 16

I. Логарифмы и их свойства

Рассмотрим задачу нахождения показателя степени x в показательном уравнении $2^x=9$.

Известных математических действий нам недостаточно. Для решения поставленной задачи нам нужны логарифмы.

Определение:

Логарифмом положительного числа N по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число N.

$\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$

$a^{\log_a N} = N$ – основное логарифмическое тождество.

Свойства логарифмов.

$a > 0$, $M>0$, $N> 0$, n – любое действительное число.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

Логарифм произведения равен сумме логарифмов.

4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Логарифм частного равен разности логарифмов.

5. $\log_a M^n = n\log_a M$

Формулы перехода от одного логарифма к другому.

1. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$
2. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
3. $\log_{a^n} M = 1/n \log_a M$

Выделяются два специальных вида логарифмов.

Десятичным логарифмом числа называется логарифм этого числа по основанию 10. Такой логарифм записывается следующим образом:

$\lg a = \log_{10} a$.

Натуральным логарифмом числа называется логарифм этого числа по основанию e, где $e \approx 2{,}7$. Записывают это так: $\ln b = \log_e b$.

Рассмотрим примеры использования свойств логарифмов.

Пример №1: Найти значение логарифма:

а) $\log_2 32$	б) $\log_5 0{,}04$
т.к. $2^5 = 32$	т.к. $0{,}04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$
то $\log_2 32 = 5$	то $\log_5 0{,}04 = -2$
в) $\log_4 64$	г) $\log_6 \frac{1}{36}$
д) $\log_{\frac{1}{3}} 81$	е) $\log_7 343$

Пример №2: Проверить справедливость равенства:

а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$	б) $\lg 0{,}01 = -2$
т.к. $3^{-4} = \frac{1}{81}$	т.к. $10^{-2} = 0{,}01$
верно	верно
в) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$	г) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$
д) $\log_5 125 = 3$	е) $\log_{16} 1 = 0$

Пример №3: Найдите число x:

а) $\log_3 x = 1$	б) $\log_{1/6} x = -3$
$x = 3^{-1}$	$x = (\frac{1}{6})^{-3}$
$x = \frac{1}{3}$.	$x = 6^3 \Rightarrow x = 216$.
в) $\log_4 x = -3$	г) $\log_{1/2} x = -3$

д) $\log_{\sqrt{5}} x=4$	е) $\log_{\frac{1}{7}} x = -1$

Пример №4: Вычислите

а)$\lg 8 + \lg 125 = \lg (8\cdot 125) = \lg 1000 = 3$.

б) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36 =$

в) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2(76 : \frac{7}{16}) = \log_2 16 = 4$.

г) $\lg 13 - \lg 13\,0 =$
д) $\log_2 11 - \log_2 44 =$

е) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3} = \frac{\lg(8+18)}{\lg 2^2+\lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \frac{\lg 12^2}{\lg 12} = \frac{2\lg 12}{\lg 12} = 2$.

ж) $\frac{\lg 72-\lg 9}{2\lg 28-\lg 7} =$

При работе с логарифмами используют два действия: логарифмирование и потенцирование.

Логарифмированием называют действие нахождения логарифма числа. Для логарифма выбирают основание и используют свойства логарифмов.

Пример №5:

а) прологарифмируем по основанию 2 выражение $14^4 \cdot \sqrt[3]{40}$ =>

$\log_2(14^4 \cdot \sqrt[3]{40}) = \log_2 14^4 + \log_2 \sqrt[3]{40} = 4\log_2 14 + \frac{1}{3}\log_2 40$.

б) прологарифмируем по основанию 10 выражение $\sqrt[3]{10} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^4 \cdot c^{-\frac{1}{2}}$ =>

$\lg(\sqrt[3]{10} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^4 \cdot c^{-\frac{1}{2}}) = \lg \sqrt[3]{10} + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^4 + \lg c^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\lg 10 + \frac{1}{3}\lg a + 4\lg b - \frac{1}{2}\lg c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lg a + 4\lg b - \frac{1}{2}\lg c$.

в) прологарифмируйте по основанию 3 выражение $9a^4 \cdot \sqrt[5]{b}$
г) прологарифмируйте по основанию 10 выражение $10^3 \cdot a^4 \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-3}$

Потенцирование – это действие, обратное логарифмированию.

Этим действием, с помощью свойств логарифма, по логарифму выражения восстанавливают исходное выражение.

Пример №6:

а) Определить x, если $\log_3 x = 3\log_3 12 + 4\log_3 26 - \log_3 19$.

Решение: $\log_3 x = 3\log_3 12 + 4\log_3 26 - \log_3 19 = \log_3 \frac{12^3 \cdot 26^4}{19}$

$x = \frac{12^3 \cdot 26^4}{19}$.

б) Найти x, если $\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c$.

Решение: $\lg x - \lg(5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4 = \lg \frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3}$

$x = \frac{\sqrt{5a} \cdot c^4}{b^3}$.

в) Найдите x, если $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$.
г) Найдите x, если $\lg x = 5\lg m + \frac{2}{3}\lg n - \frac{1}{4}\lg p$.
д) Найдите x, если $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$.

е) Решите уравнение $\log_3 x = 2\log_3 6 - \log_3 12$.

II. Логарифмическая функция

Определение:

Функцию, заданную формулой $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

называют логарифмической функцией с основанием a.

Основные свойства логарифмической функции.

1.Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.

2.Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел.

3.Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a > 1$ или убывает при $0 < a < 1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $\log_a 1 = 0$ при любом $a > 0$, так как $a^0 = 1$

Вследствие возрастания функции при $a > 1$ получаем, что при $x > 1$ логарифмическая функция принимает положительные значения,

при $0 < x < 1$ – отрицательные.

Если $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывает , поэтому $\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ и $\log_a x < 0$ при $x > 1$.

Опираясь на доказанные свойства, нетрудно построить график функции

$y = \log_a x$ при $a > 1$ (рис. а) и $0 < a < 1$ (рис. б).

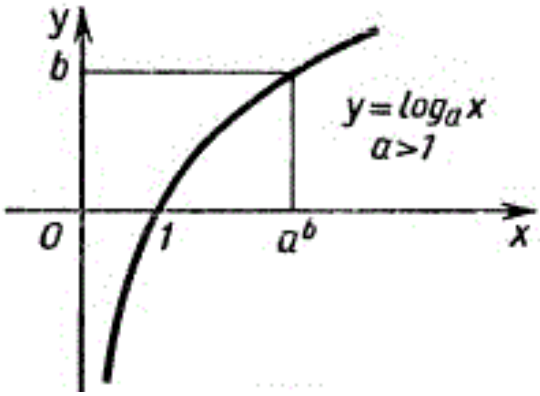


рис. а

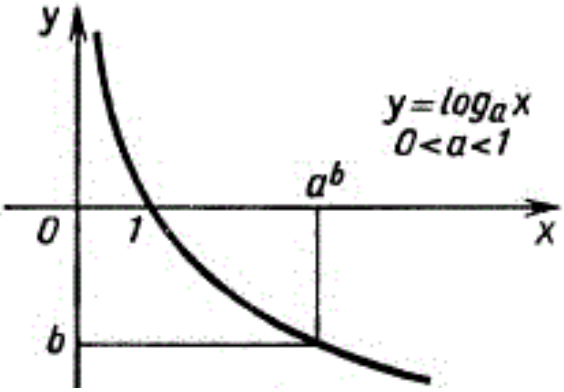


рис. б

Справедливо утверждение: Графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой y = x. Логарифмическая и показательная функции являются взаимно-обратными.

Пример №1:

а) Найти область определения функции $f(x) = \log_8(4-5x)$.

По свойству логарифмической функции

$4-5x > 0$;

$x < 0{,}8$

Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}8)$.

Найти область определения:

б) $f(x) = \log_3(x-4)$.	в) $f(x) = \log_{0,3}(x^2-16)$.

Пример №2:

а) Сравнить числа $\log_3 5$ и $\log_3 7$.

Решение: $a = 3 > 1$, функция возрастает и $5 < 7 \Rightarrow \log_3 5 < \log_3 7$.

б) Сравнить числа $\log_{\frac{1}{5}} 5$ и $\log_{\frac{1}{5}} 7$.

Решение: $a = \frac{1}{5}$, $0 < \frac{1}{5} < 1$, функция убывает и $5 < 7 \Rightarrow \log_3 5 > \log_3 7$.

Сравнить:

в) $\log_2 3{,}8$ и $\log_2 4{,}7$.	г) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}15$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$.

д) Что больше: $\log_2 3 + \log_2 7$ или $\log_2(3+7)$?

Решение: по свойству логарифмов преобразуем выражения

$\log_2 3 + \log_2 7 = \log_2(3 \cdot 7) = \log_2 21$ и $\log_2(3+7) = \log_2 10$;

т.к. $a = 2 > 1$, функция возрастает и $10 < 21$, то $\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2(3+7)$.

е) Сравните выражения:

$3\log_2 7$ и $\log_2(7 \cdot 3)$.

III. Логарифмические уравнения

<u>Определение:</u> *Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими.*

Рассмотрим простейшие логарифмические уравнения:

$log_a x = b$, $x > 0$	$log_x a = b$, $x > 0$, $x \neq 1$
$x = a^b$	$x = \sqrt[b]{a}$
Пример:	Пример:
$\log_5 x = 2$;	$\log_x 16 = 2$;
$x = 5^2$;	$x = \sqrt[2]{16}$;
$x = 25$.	$x = 4$.

Решить простейшие уравнения:

а) $\log_9 x = 3$.	б) $\log_{0,4} x = -1$.
в) $\lg x = 2$.	г) $\log_x 32 = 5$.

<u>Способы решения логарифмических уравнений</u>

<u>1. По определению логарифма</u>

Пример: Решить уравнение $\log_3(5 + 2x) = 2$.
Решение: ОДЗ: $5+2x > 0 \Rightarrow x > -2,5$
По определению $5+2x = 3^2$;
$5+2x = 9$;
$2x = 4$;
$x = 2$;
Проверка: $2 > -2,5$
Ответ: $x = 2$.

Решить уравнения:

а) $\log_4(6x - 3) = 2$.	б) $\lg(12 - 3x) = 2$.

в) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$.	г) $\log_2(3-x) = 0$.

2. Потенцирование (свойства логарифмов)

Пример №1: Решить уравнение $\log_a x = 2\log_a 3+\log_a 5$.	
$\log_a x = \log_a(3^2 \cdot 5)$;	
Ответ: x = 45.	
а) $\log_a x = \log_a 10 - \log_a 5$	б) $\log_3 x = \frac{1}{2}\log_3 4 + 2\log_3 5$
Пример №2 Решить уравнение $\lg(x-9)+\lg(2x-1) = 2$.	
ОДЗ: $\begin{cases} x-9 > 0, \\ 2x-1 > 0; \end{cases}$ <=> ОДЗ: $x > 9$	
$\lg(x-9) \cdot (2x-1) = 2$; (по свойству логарифмов)	
$(x-9) \cdot (2x-1) = 10^2$;	
$2x^2 - 19x - 91 = 0$;	
$x_1 = 13$ и $x_2 = -3{,}5$;	
Делаем проверку по ОДЗ.	

$x_1 = 13 > 9$, $x_2 = -3{,}5 < 9$;
Ответ: x = 13.
а) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.
Пример №3: Решить уравнение $\log_7(x+3) = \log_7(2x-4)$.
ОДЗ: $\begin{cases} x+3 > 0, \\ 2x-4 > 0; \end{cases}$ <=> ОДЗ: $x > 2$;
т.к. основания логарифмов одинаковые, можем составить уравнение
$x+3 = 2x-4$;
$x = 7$;
Делаем проверку по ОДЗ
Ответ: x= 7.
а) $\log_2(2x+3) = \log_2(x-6)$.

3. Метод замены переменной.

Пример: Решить уравнение $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$.

Обозначим $\log_5 x = t$, получаем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$

Корни уравнения: $t_1 = 2$, $t_2 = -1$

Возвращаемся к исходной переменной.

$\log_5 x = 2$;	$\log_5 x = -1$;
$x_1 = 5^2$;	$x_2 = 5^{-1}$;
$x_1 = 25$;	$x_2 = \frac{1}{5}$;
Ответ: $x_1 = 25$; $x_2 = \frac{1}{5}$.	
а) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$.	
б) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$.	

IV. Логарифмические неравенства

<u>Определение:</u> *Неравенства, содержащие переменную под логарифмом, называются логарифмическими.*

Для решения логарифмических неравенств удобно применять следующий алгоритм:

1. *Привести неравенство к виду*

$$log_a f(x) < log_a y(x);$$

2. *Выписать основание а и сравнить с единицей*

3. *Если а > 1, то функция возрастает,* $\begin{cases} f(x) > 0, \\ y(x) > 0, \\ f(x) < y(x); \end{cases}$

   знак неравенства не меняется

   Если 0 < а < 1, то функция убывает, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ y(x) > 0, \\ f(x) < y(x); \end{cases}$

   знак неравенства меняется

4. *Изобразить решение системы на числовой прямой.*

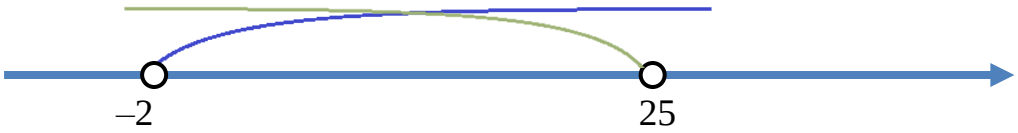
Пример №1: Решить неравенство $\log_3(x+2) < 3$.

По определению логарифма $3^3 = 27$ получаем неравенство

$\log_3(x+2) < \log_3 27$.

Основание $a = 3 > 1$, функция возрастает, знак неравенства не меняется.

Составим систему: $\begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 < 27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 25. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-2; 25)$.

а) $\log_8(4-2x) \geq 2$.

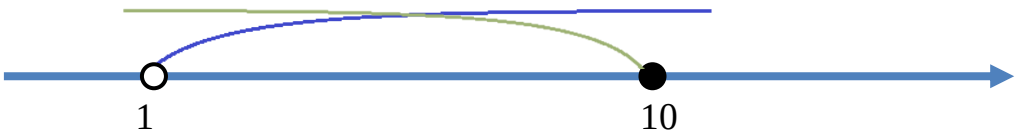
Пример №2:

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq -2$ (по определению логарифма $(\frac{1}{3})^{-2}=9$)

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Основание $a = \frac{1}{3}, 0 < \frac{1}{3} < 1$, функция убывает, знак неравенства меняется.

Составим систему: $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1 \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x \leq 10. \end{cases}$



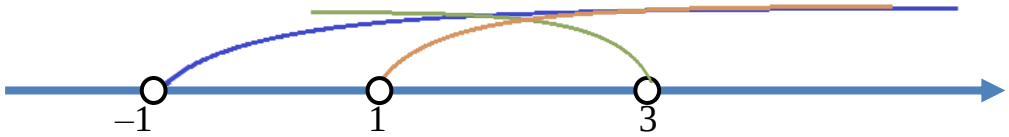
Ответ: $x \in (1; 10]$.

б) $\log_{\frac{1}{2}}(2-5x) < -1$.

Пример №3: Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

Основание $a = \frac{1}{5}, 0 < \frac{1}{5} < 1$, функция убывает, знак неравенства меняется.

Составим систему: $\begin{cases} 3x-5>0, \\ x+1>0, \\ 3x-5<x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>-1, \\ 2x<6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>-1, \\ x<3. \end{cases}$



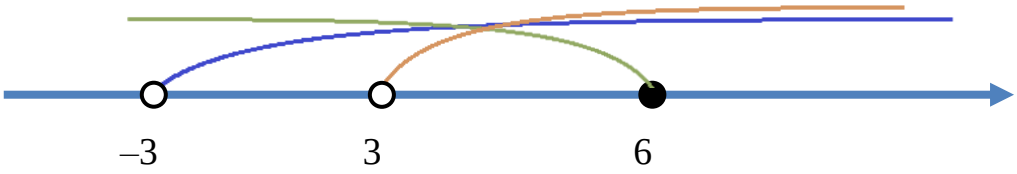
Ответ: $x \in (1; 3)$.

в) $\log_{0,3}(2x-4)>\log_{0,3}(x+1)$.

Пример №4: $\lg(3x-9) \le \lg(x+3)$.

Основание $a = 10>1$, функция возрастает, знак неравенства не меняется.

Составим систему: $\begin{cases} 3x-9>0, \\ x+3>0, \\ 3x-9 \le x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>9, \\ x>-3, \\ 2x \le 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x>-3, \\ x \le 6. \end{cases}$



Ответ: $x \in (3; 6]$.

г) $\log_4(4x-7)>\log_4(2+x)$.

Литература

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учеб. для ссузов / Н.В. Богомолов, П.И.Самойленко.-7-е изд., стереотип. - М.: Дрофа, 2010.-395 с. [ГРИФ]

2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике [Текст]: учеб. пособие для ссузов /Н.В.Богомолов.-6-е изд., стереотип. - М.: Дрофа, 2012.-204 с. [ГРИФ]